74-MA'RUZA

NUQTAVIY BAHOLAR, ULARNING ASOSIY HOSSALARI. O'RTA QIYMAT VA DISPERSIYA UCHUN BAHOLAR. INTERVALLI BAHOLAR. ISHONCHLILIK INTERVALI

Mavzuning rejasi

1.O'rta qiymat va dispersiya uchun baholar.
2. Ishonchlilik intervali
3. Intervalli baholar.

Tayanch so'z va iboralar: tanlanma taqsimot qonuni, noma'lum parametri uchun baho (statistika), nuqtaviy baho, haqiqatga eng yaqin funksiya, ekstremum nuqta, asimptotik siljimagan, asosli va effektiv, ishonchlilik oralig'i.

Ta'rif

$x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanmaning har qanday sonli funksiyasi tanlanma taqsimot qonunining noma'lum parametri uchun baho (statistika) deyiladi va $\theta_n = \theta_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ deb belgilanadi.

Bitta son bilan aniklanadigan statistik baho n**uqtaviy baho** deyiladi.

Nuqtaviy bahoning xossalari

Asosli baho

θ_n baho noma'lum para-metr θ uchun siljimagan baho deyiladi, agar baho noma'lum parametr θ uchun **asosli baho** deyiladi, agar har qanday musbat ε son uchun $\lim\limits_{n\to\infty} P\left[\left|\theta_n - \theta\right| < \varepsilon\right] = 1$ bo'lsa.

Effektiv baho

θ_{n_1} baho θ_{n_2} ga nisbatan **effektivroq** deyiladi, agar $D(\theta_{n_1}) \le D(\theta_{n_2})$ bo'l-sa. Minimal dispersiya-ga ega bo'lgan baho **effektiv baho** deyiladi.

Siljimagan baho

θ_n baho noma'lum para-metr θ uchun **siljima-gan baho** deyiladi, agar $M(\theta_n) = \theta$ bo'lsa. Bir-biridan farqli bo'lgan siljimagan baholar cheksiz ko'p bo'ladi.

Bahoning siljigan yoki siljimagan ekanligini tekshirish

Odatda siljimagan, asosli, effektiv baho yagona bo'ladi. Bahoning siljigan yoki siljimagan ekanligini tekshirish uchun bahoning matematik kutilishini hisoblash yetarli.

Bahoning asosli ekanligini tekshirish

Bahoning asosli ekanligi ta'rifdan foydalanib ko'rsatish qiyin. Shuning uchun bahoning asosli ekanligini quyidagi teoremadan foydalanib tekshiramiz.

Teorema. θ_{n_1} baho noma'lum parametr θ uchun asosli baho bo'ladi, agar

1. $M(\theta_n) \to \theta,\ \text{ассимптотик силжимаганлик}\ n \to \infty$ 2. $D(\theta_{n_1}) \to 0,\ n \to \infty$

Bahoning effektiv ekanligini tekshirish

Bahoning effektiv ekanligini ta'rifdan foydalanib tekshirib bo'lmaydi. Shuning uchun effektiv bahoga olib keladigan haqiqatga eng yaqin baholash usulini ko'rib chiqamiz.

Haqiqatga eng yaqin baholash usuli

$x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanmaning taqsimot qonunini $p(x,\theta)$ bo'lsin. θ noma'lum parametr.

Ushbu funksiyani qaraymiz. $L(x,\theta) = P(x_1,\theta)\cdot P(x_2,\theta)\cdot ...\cdot P(x_n,\theta)$ tanlanmaning ro'y berish ehtimoli. Bu funksiya **haqiqatga eng yaqin funksiya** deyiladi. Noma'lum parametr θ ni $L(x,\theta)$ funksiyaning maksimumga erishish shartidan topamiz. Musbat funksiya va uning logarifmi bir hil ekstremum nuqtalarga ega bo'lganligi uchun $L(x,\theta)$ o'rniga uning logarifmini qaraymiz.

$$\ell(x,\theta)=\ln L(x,\theta)=\sum_{k=1}^{n}\log P(x_k\,\theta),\qquad \frac{\partial\ell}{\partial\theta}=\sum_{k=1}^{n}\frac{P'(x_k\,\theta)}{P\ (x_k\,\theta)}$$

bu yerdan $\theta=\theta_0$ kritik nuqtani topamiz. Agar $\frac{\partial^2\ell}{\partial\theta^2}<0$ bo'lsa, u holda $L(x,\theta)$ funksiya θ_0 nuqtada maksimumga erishadi va θ_0 baho haqiqatga eng yaqin baholash usuli bo'yicha topilgan baho deyiladi. Bu baho **asimptotik siljimagan, asosli va effektiv** bo'ladi.

Ishonchlilik oralig'i

$x_1,x_2,...,x_n$ tanlanmaning taqsimot qonuni $P(x,\theta)$ bo'lsin (θ-noma'lum parametr).

Ayrim masalalarda noma'lum parametr θ ning qiymati o'rniga shu aniq qiymat joylashishi mumkin bo'lgan oraliqlarni ko'rsatish yetarli bo'ladi.

Ta'rif. $\lfloor\theta_{n_1},\theta_{n_2}\rfloor$ kesma ishonchlilik darajasi $1-\alpha$ bo'lgan noma'lum parametr θ uchun **ishonchlilik oralig'i** deyiladi, agar $P(\theta_{n_1}\le\theta\le\theta_{n_2})=1-\alpha$ bo'lsa

Noma'lum parametr uchun ishonchlilik oralig'ini tanlanma normal taqsimlangan bo'lgandagina topish mumkin.

$x_1,x_2,...,x_n$ tanlanma normal taqsimlangan bo'lsin, ya'ni $P(x;a;\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$,

bu yerda biz faqat noma'lum parametr a uchun ishonchlilik oralig'ini qo'ramiz.

1. σ^2 ma'lum bo'lsin.

Quyidagi faktdan foydalanamiz, agar $X_1,X_2,...,X_n$ tasodifiy miqdor normal taqsimlangan bo'lsa, u holda $Y=\frac{x_1+...+x_n-a}{b}$ tasodifiy miqdor ham normal taqsimlangan bo'ladi.

Ushbu tasodifiy miqdorni qaraymiz. $Y=\frac{x_1+...+x_n-na}{\sqrt{n}\sigma}$ bu tasodifiy miqdor normal taqsimlangan, uning matematik kutilishi va dispersiyasini topamiz.

Matematik kutilish

$$MY=M\left(\frac{x_1+...+x_n-na}{\sqrt{n}\sigma}\right)=\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}M\left(x_1+...+x_n-na\right)=\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\left(M(x_1)+...+M(x_n)-M(na)\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}(a+a+...+a-na)=0$$

Dispersiya

$$DY=M\left(\frac{x_1+...+x_n-na}{\sqrt{n}\sigma}\right)=\frac{1}{\sqrt{n}\sigma^2}\left(D(x_1)+...+D(x_n)-D(na)\right)=\frac{1}{\sqrt{n}\sigma^2}(\sigma^2+\sigma^2+...+\sigma^2-0)=1$$

2. σ^2 noma'lum bo'lsin.

$Y=\frac{x_1+...+x_n-a}{b}$ tasodifiy miqdorni qaraymiz. σ^2 noma'lum bo'lganligi uchun, yuqoridagi usulni qo'llab bo'lmaydi. Shuning uchun σ^2 ning o'rniga uning haqiqatga eng yaxshi bahosini, ya'ni haqiqatga eng yaqin baholash usuli bilan topilgan bahoni quyamiz.

$\sigma^2 \approx S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ ushbu tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni normal bo'lmaydi, chunki mahrajidagi S tasodifiy miqdordir.

Bu tasodifiy miqdor taqsimot qonunini V. Gosset 1908 yili maqola sifatida e'lon qilgan. Bu taqsimot qonuni St'yudentning t taqsimot qonuni deyiladi. Bu taqsimot qonunini qo'llasak noma'lum a uchun ishonchlilik oralig'i quyidagicha bo'ladi.

$$\overline{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha \le a \le \overline{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha$$

Ishonchlilik oralig'ini hisoblash formulalari

σ^2 ma'lum bo'lsa.

$$\overline{x} - \frac{\varepsilon\sigma}{\sqrt{n}} \le a \le \overline{x} + \frac{\varepsilon\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \varepsilon = x_\alpha$$

σ^2 noma'lum bo'lsa.

$$\overline{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha \le a \le \overline{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha$$